JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 9, 272–277 (1973)

Eine Verschärfung eines Approximationssatzes von Carleman

LOTHAR HOISCHEN

Mathematisches Institut der Universität Gießen, 63 Gießen Germany

Communicated by G. G. Lorentz

Received November 5, 1971

Als Erweiterung des Weierstraßschen Approximationssatzes zu einer asymptotischen Approximation zeigte 1927 Carleman [1], daß zu jeder auf der reellen Achse R $(-\infty < x < \infty)$ stetigen Funktion f und jeder auf R positiven, stetigen Funktion h eine in der ganzen komplexen z-Ebene $(z = x + iy)$ analytische Funktion g existiert mit

$$|f(x) - g(x)| < h(x) \qquad (x \in R).$$

Neuere Beweise dieses Satzes wurden von Kaplan [4], Sinclair [5], und Hoischen [3] gegeben.

Es bezeichne C^∞ die Klasse aller auf R komplexwertigen, beliebig oft differenzierbaren Funktionen.

Als Verschärfung des Carlemanschen Satzes beweisen wir in dieser Arbeit folgenden Satz über die asymptotische Approximation aller Ableitungen der Funktionen aus C^∞.

SATZ 1. *Zu jeder Funktion $f \in C^\infty$, jeder auf R positiven, stetigen Funktion h und jeder Folge reeller Zahlen c_n mit $0 \leqslant c_n \leqslant c_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2,...)$ und $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$ gibt es eine in der ganzen komplexen z-Ebene analytische Funktion g mit*

$$|f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)| < h(x) \qquad (|x| \geqslant c_n\,;\, n = 0, 1, 2,...). \tag{1}$$

Aus Satz 1 folgt insbesondere wieder der Carlemansche Satz, da die auf R stetigen Funktionen asymptotisch beliebig gut durch Funktionen der Klasse C^∞ approximiert werden können, wie man leicht zeigt.

Satz 1 ist in dem Sinne bestmöglich, daß eine Approximation der Gestalt (1) nicht mehr für alle $f \in C^\infty$ und alle auf R positiven, stetigen Funktionen h durch ganze Funktionen erreicht werden kann, wenn $\lim_{n\to\infty} c_n < \infty$ ist.

Denn zu einem Punkt $x_0 > \lim_{n\to\infty} c_n$ läßt sich zum Beispiel ein $f \in C^\infty$ mit

$$f^{(n)}(x_0) = (n!)^2 + 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

nach Berz [2, S. 228] angeben, so daß dann für $h(x) = 1$ die Abschätzung $|g^{(n)}(x_0)| > f^{(n)}(x_0) - h(x_0) = (n!)^2$ aus (1) folgt, und g somit keine für $z \neq x_0$ konvergente Potenzreihenentwicklung um den Punkt x_0 haben kann.

Mit der in dieser Arbeit benutzten Beweismethode läßt sich ferner für die endlich oft differenzierbaren Funktionen der folgende Satz zeigen, der im Falle $k = 1$ von Kaplan [4] bewiesen wurde.

SATZ 2. *Zu jeder k-mal stetig differenzierbaren Funktion f auf R und jeder positiven, stetigen Funktion h auf R gibt es eine in der ganzen komplexen z-Ebene analytische Funktion g mit*

$$|f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)| < h(x) \qquad (x \in R; 0 \leqslant n \leqslant k).$$

Als wichtigstes Hilfsmittel zum Beweis dieser Sätze benutzen wir die folgende Approximationseigenschaft Gaußscher Integrale, wobei $\exp(z)$ stets die Exponentialfunktion e^z bezeichne.

LEMMA. *Es sei $a < b < c < d$, und es sei die Funktion w auf $[a, d]$ k-mal stetig differenzierbar. Ferner sei*

$$T(w, x, a, d, q) = q/\pi^{1/2} \int_a^d w(t) \exp[-q^2(x-t)^2]\, dt.$$

Dann streben die bezüglich x gebildeten Ableitungen $T^{(l)}(w, x, a, d, q)$ $(0 \leqslant l \leqslant k)$ mit $q \to \infty$ gleichmäßig auf $[b, c]$ gegen $w^{(l)}(x)$.

Beweis. Durch Differentiation und partielle Integration ergibt sich

$$T^{(l)}(w, x, a, d, q) = T(w^{(l)}, x, a, d, q)$$
$$+ \sum_{i=0}^{l-1} \{w^{(l-i-1)}(a) \exp[-q^2(x-a)^2] - w^{(l-i-1)}(d) \exp[-q^2(x-d)^2]\}^{(i)},$$

wobei im Falle $l = 0$ die Summe in dieser Gleichung durch 0 zu ersetzen ist.

Bei Beachtung von $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2)\, dt = \pi^{1/2}$ folgt somit

$$\begin{aligned}
w^{(l)}(x) &- T^{(l)}(w, x, a, d, q) \\
&= q/\pi^{1/2} \int_a^d [w^{(l)}(x) - w^{(l)}(t)] \exp[-q^2(x-t)^2]\, dt \\
&\quad + q w^{(l)}(x)/\pi^{1/2} \left\{ \int_{-\infty}^{a} \exp[-q^2(x-t)^2]\, dt + \int_d^{\infty} \exp[-q^2(x-t)^2]\, dt \right\} \\
&\quad + q/\pi^{1/2} \sum_{i=0}^{l-1} \{ w^{(l-i-1)}(d) \exp[-q^2(x-d)^2] \\
&\quad - w^{(l-i-1)}(a) \exp[-q^2(x-a)^2] \}^{(i)}.
\end{aligned}$$

Wie einfache Abschätzungen zeigen, strebt daher $w^{(l)}(x) - T^{(l)}(w, x, a, d, q)$ wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $w^{(l)}$ auf $[a, d]$ mit $q \to \infty$ gleichmäßig auf $[b, c]$ gegen 0, woraus die Behauptung des obigen Hilfssatzes folgt.

Beweis zu Satz 1. Offensichtlich genügt es zu zeigen, daß zu jeder Funktion $f \in C^\infty$, jeder auf R positiven, stetigen Funktion h und jeder monoton wachsenden Folge natürlicher Zahlen k_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ eine ganze Funktion g so existiert, daß für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ gilt

$$|f^{(l)}(x) - g^{(l)}(x)| < h(x) \qquad (|x| \in [n, n+1];\ 0 \leqslant l \leqslant k_n). \tag{2}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir hierbei $h(x) = h(-x)$ und $h(x)$ für $x > 0$ als monoton fallend annehmen mit

$$h(n+1) < \tfrac{1}{2} h(n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Wir wählen die spezielle Funktion $\varphi \in C^\infty$ mit

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & (x \leqslant 0), \\ 1/c \int_0^x b(t)\, dt & (0 < x \leqslant 1), \\ 1 & (x > 1), \end{cases} \tag{4}$$

wobei $b(t) = \exp(-1/t - 1/(1-t))$ $(0 < t < 1)$, $b(0) = b(1) = 0$ und $c = \int_0^1 b(t)\, dt$ gesetzt wird.

Es sei

$$d_l = \max_{x \in R} |\varphi^{(l)}(x)| \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots)$$

und

$$B_n = \max_{0 \leqslant l \leqslant k_n} d_l \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Nach (4) gilt $B_n \geqslant 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Wir konstruieren nun sukzessiv nach obigem Lemma Gaußsche Integrale $g_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ in folgender Weise: Es sei

$$g_0(x) = T(f, x, -2, 2, q_0)$$

und q_0 hierbei so groß, daß

$$| f^{(l)}(x) - g_0^{(l)}(x)| < h(1)/4.2^{k_0} B_0 (| x | \leqslant 1; 0 \leqslant l \leqslant k_0). \tag{6}$$

Sind die Integrale $g_i(x)$ für $0 \leqslant i \leqslant n - 1$ schon bestimmt, so setzen wir

$$S_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} g_i(x) \tag{7}$$

und

$$u_{n-1}(x) = \begin{cases} \varphi(x - n + 1)[f(x) - S_{n-1}(x)] & (x \geqslant 0), \\ \varphi(-x - n + 1)[f(x) - S_{n-1}(x)] & (x < 0). \end{cases} \tag{8}$$

Nach (4) und (8) ist $u_{n-1} \in C^\infty$, und es gilt

$$\begin{aligned} u_{n-1}(x) &= 0 && (| x | \leqslant n - 1), \\ u_{n-1}(x) &= f(x) - S_{n-1}(x) && (| x | \geqslant n). \end{aligned} \tag{9}$$

Ferner sei

$$M_{n-1} = \max_{|x| \leqslant n+2} | u_{n-1}(x)|. \tag{10}$$

Wir wählen jetzt nach obigem Lemma das Gaußsche Integral

$$g_n(x) = T(u_{n-1}, x, -n - 2, n + 2, q_n) \tag{11}$$

und q_n hierbei so groß, daß

$$| u_{n-1}^{(l)}(x) - g_n^{(l)}(x)| < h(n + 1)/4.2^{k_n} B_n \qquad (| x | \leqslant n + 1; \quad 0 \leqslant l \leqslant k_n) \tag{12}$$

ist und außerdem gilt

$$M_{n-1} q_n \exp[-\tfrac{1}{2} q_n^2 (n - 1)^2] < 2^{-n}. \tag{13}$$

Aus (7), (9), und (12) folgt für $n = 0, 1, 2,\ldots$

$$|f^{(l)}(x) - S_n^{(l)}(x)| < h(n+1)/4.2^{k_n}B_n \qquad (|x| \in [n, n+1];\quad 0 \leqslant l \leqslant k_n). \tag{14}$$

Ferner ergibt sich nach Konstruktion der $g_n(x)$ leicht für $n = 1, 2, 3,\ldots$ die Abschätzung

$$|g_n^{(l)}(x)| < \tfrac{3}{8}h(n) \qquad (|x| \leqslant n;\quad 0 \leqslant l \leqslant k_{n-1}), \tag{15}$$

da für $|x| \leqslant n$ aus (3), (5), (8), (9), (12), und (14), folgt

$$\begin{aligned} |g_n^{(l)}(x)| &\leqslant |u_{n-1}^{(l)}(x)| + |u_{n-1}^{(l)}(x) - g_n^{(l)}(x)| \\ &< \max_{|t|\in[n-1,n]} |u_{n-1}^{(l)}(t)| + h(n+1)/4.2^{k_n}B_n \\ &< \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} \max_{|t|\in[n-1,n]} [|\varphi^{(i)}(t)|\,|f^{(l-i)}(t) - S_{n-1}^{(l-i)}(t)|] + \tfrac{1}{4}h(n+1) \\ &< B_{n-1}h(n)/4.2^{k_{n-1}}B_{n-1} \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} + \tfrac{1}{4}h(n+1) \\ &< \tfrac{1}{4}[h(n) + h(n+1)] < \tfrac{3}{8}h(n). \end{aligned}$$

Wir setzen

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(z). \tag{16}$$

Alle Funktionen g_n ($n = 0, 1, 2,\ldots$) sind offensichtlich in der ganzen z-Ebene analytisch, und wir haben zunächst zu zeigen, daß die Reihe (16) in jeder kompakten Teimenge der z-Ebene gleichmäßig konvergiert, so daß daher g eine ganze Funktion ist.

Nach (10), (11), und (13) ergibt sich bei Beachtung von (9) für $n > |z|/((\frac{3}{2})^{\frac{1}{2}} - 1) + 1$, das heißt für $2|z|/(n-1) + |z|^2/(n-1)^2 < \frac{1}{2}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |g_n(z)| &\leqslant 2M_{n-1}q_n \int_{n-1}^{n+2} \exp\left[-q_n^2t^2\left(1 - \frac{2|z|}{t} - \frac{|z|^2}{t^2}\right)\right] dt \\ &< 2M_{n-1}q_n \exp[-\tfrac{1}{2}q_n^2(n-1)^2] < 2^{-n+1}, \end{aligned}$$

woraus die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe (16) in jeder kompakten Teilmenge der z-Ebene folgt.

In (16) darf also beliebig oft gliedweise differenziert werden, und wir erhalten aus (3), (6), (7), (14), (15), und (16) für $|x| \in [n, n+1]$; $0 \leqslant l \leqslant k_n$; $n = 0, 1, 2, \ldots$ die Abschätzung

$$|f^{(l)}(x) - g^{(l)}(x)| \leqslant |f^{(l)}(x) - S_n^{(l)}(x)| + \sum_{i=n+1}^{\infty} |g_i^{(l)}(x)|$$

$$< \tfrac{1}{4}h(n+1) + \tfrac{3}{8} \sum_{i=n+1}^{\infty} h(i) < h(n+1) \leqslant h(x)$$

und somit die Approximationseigenschaft (2), so daß Satz 1 bewiesen ist.

Der Beweis zu Satz 2 ergibt sich als vereinfachte Modifikation des Beweises zu Satz 1. Es kann jedoch Satz 2 auch direkt aus Satz 1 gefolgert werden, indem man zeigt, daß die Ableitungen einer k-mal stetig differenzierbaren Funktion durch die entsprechenden Ableitungen einer geeignet zu wählenden Funktion der Klasse C^∞ beliebig gut asymptotisch approximiert werden können.

Ferner sei noch darauf hingewiesen, daß sich mit der hier benutzten Beweismethode entsprechende Sätze über die asymptotische Approximation von Funktionen mit mehreren Veränderlichen durch naheliegende Verallgemeinerungen herleiten lassen.

Literatur

1. T. Carleman, Sur un théorème de Weierstrass, *Ark. Mat. Astronom. Fys.* **20B** (1927), 1–5.
2. E. Berz, Operatoren verallgemeinerter Funktionen, *Math. Ann.* **158** (1965), 215–232.
3. L. Hoischen, A note on the approximation of continuous functions by integral functions, *J. London Math. Soc.* **42** (1967), 351–354.
4. W. Kaplan, Approximation by entire functions, *Michigan Math. J.* **3** (1955–1956), 43–52.
5. A. Sinclair, A general solution for a class of approximation problems, *Pacific J. Math.* **8** (1958), 857–866.